AGH
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Podstawy wytrzymałości materiałów

IMiR - MiBM - Wykład Nr 9

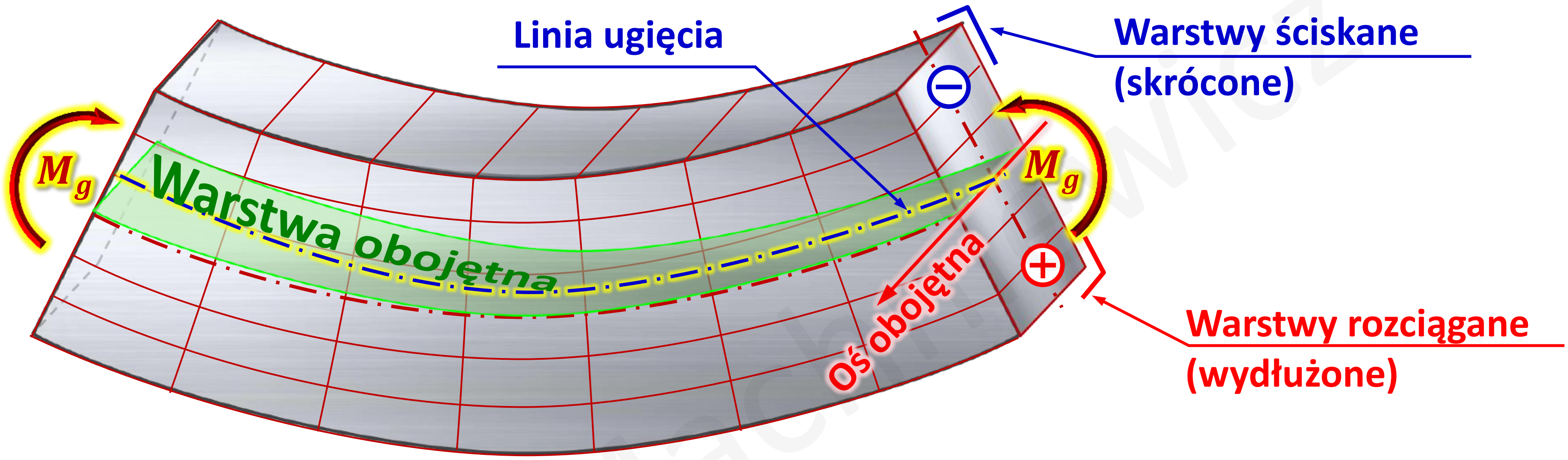
Odkształcenia belek zginanych

linia ugięcia belki, kąt obrotu belki, warunek sztywności przy zginaniu, równanie różniczkowe linii ugięcia belki, warunki brzegowe, warunki ciągłości odkształceń, zastosowanie zasady superpozycji do wyznaczania odkształceń belek, wyznaczanie reakcji w belkach statycznie niewyznaczalnych.

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

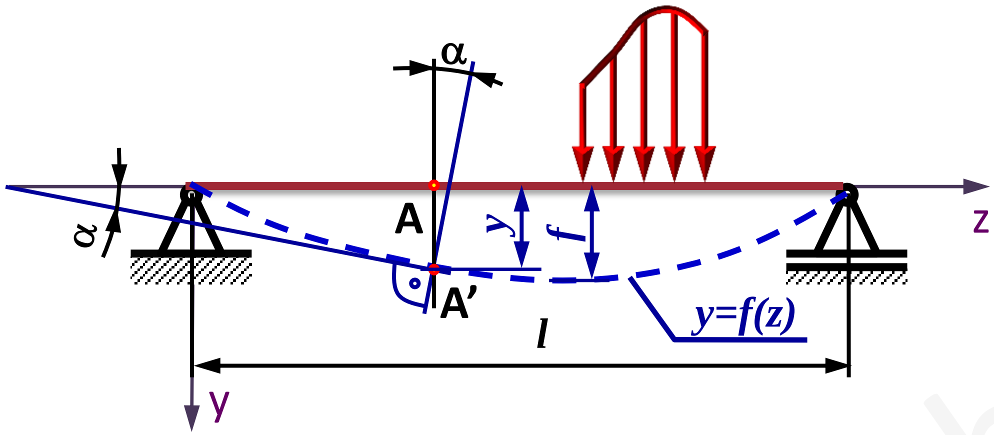
9.1. Linia ugięcia belki



Linia ugięcia – linia łącząca środki ciężkości przekrojów poprzecznych odkształconej belki.

Proste zginanie – przypadek obciążenia kiedy wypadkowy moment zginający w przekroju poprzecznym belki działa wzdłuż jednej z głównych osi bezwładności.

9.2. Warunek sztywności belki



Równanie linii ugięcia belki: $y=f(z)$

Strzałka ugięcia: $f=max\ (|y|)$

Warunek sztywności belki:

$$\boxed{f \leq f_{dop}}$$

f_{dop} - dopuszczalna strzałka ugięcia (…, **mm**, cm, …)

Zwykle: $f_{dop} = \dfrac{l}{k}$

l – długość belki,
k – współczynnik zależny od przeznaczenia belki,

Kąt obrotu belki:

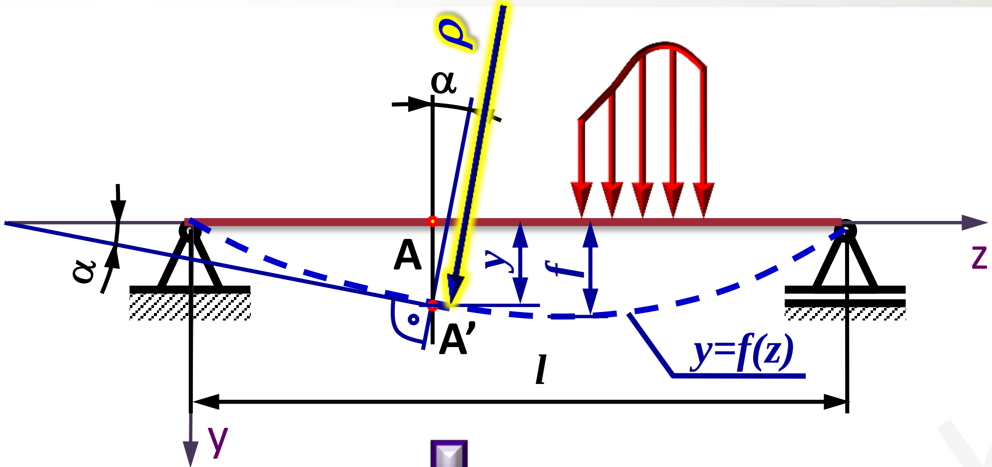
$$tg(\alpha) = \frac{dy}{dz}$$

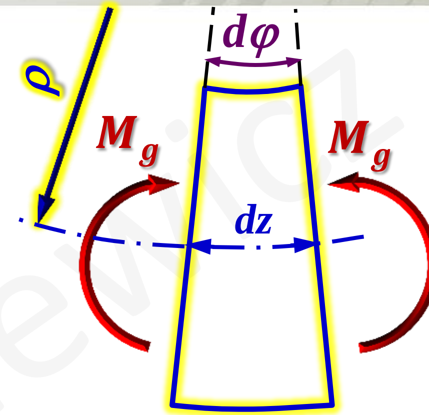
y – ugięcie belki w danym punkcie,
α – kąt obrotu belki *(rad)*

Ponieważ zwykle kąt α jest bardzo mały, więc: $tg(\alpha) \cong \alpha$

Stąd: $$\boxed{\alpha = \frac{dy}{dz}}$$

9.3. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki





Według geometrii różniczkowej
(dla układu osi y-z jak wyżej):

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

=

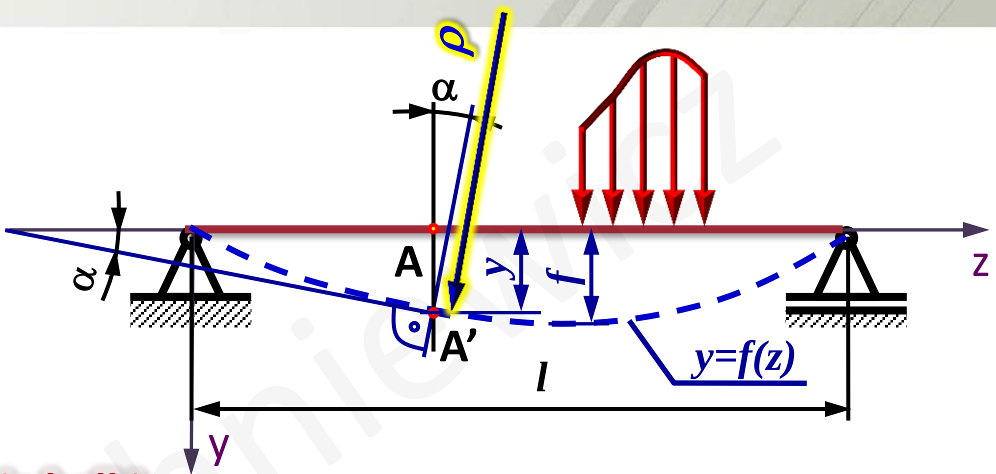
Krzywizna osi belki
poddanej czystemu zginaniu
(por. zginanie – war. bezpieczeństwa):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{g(z)}}{EJ}$$

(EJ) **- sztywność giętna**

9.3. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

$$-\frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{M_{g(z)}}{EJ}$$



ponieważ: $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \cong 0$

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki:

$$EJ\frac{d^2y}{dz^2}=-M_{g(z)}$$

- ***E*** – moduł Younga
- ***J*** – moduł bezwładności
- $M_{g(z)}$ – moment gnący
- ***y*** – ugięcie belki

jednokrotne całkowanie

$$EJ\frac{dy}{dz}=\int -M_{g(z)}dz+C$$

- równanie ma kąt obrotu $\left(\alpha=\frac{dy}{dz}\right)$

powtórne całkowanie

$$EJy=\iint -M_{g(z)}dzdz+Cz+D$$

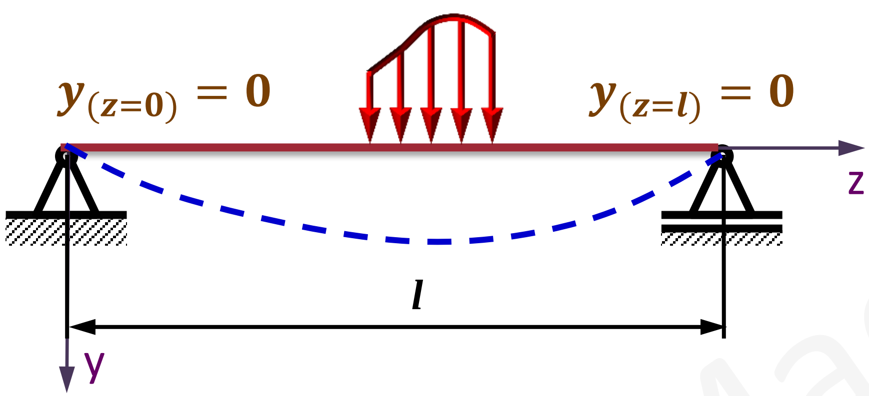
- równanie linii ugięcia

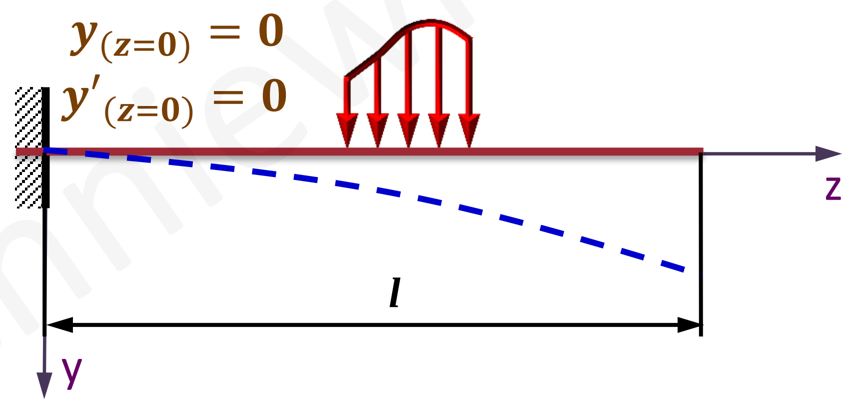
C, D **– stałe całkowania, wyznaczane na podstawie warunków brzegowych**

9.3. Warunki brzegowe – wyznaczanie stałych całkowania

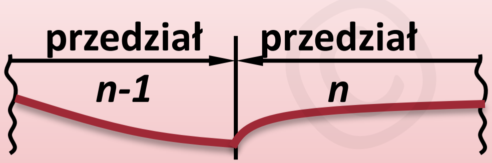
Stałe całkowania *C* i *D* wyznacza się:

a) z warunków brzegowych, tzw. warunków podparcia:



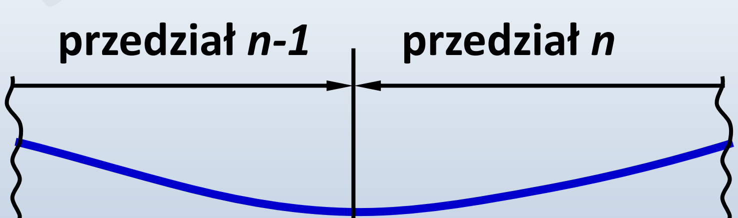


b) z warunków ciągłości odkształceń w sąsiednich przedziałach, tzw. warunków szycia (belki o wielu przedziałach zmienności funkcji momentu $M_{g(z)}$):



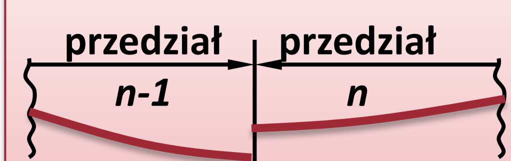
$\alpha_{n-1} \neq \alpha_n$

przypadek niemożliwy gdy nie ma przegubu



$\alpha_{n-1} = \alpha_n$

$y_{n-1} = y_n$



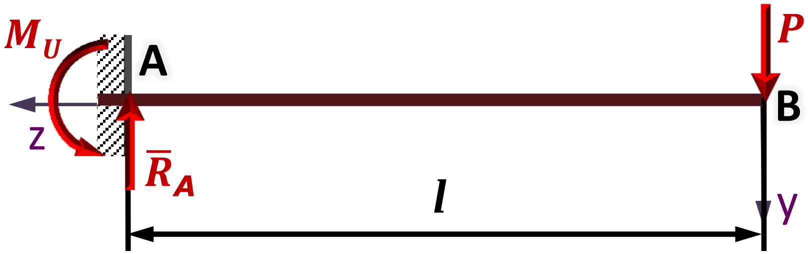
$y_{n-1} \neq y_n$

przypadek niemożliwy dla belki ciągłej

Przykład 9.1

Wyznaczyć ugięcie (f_B) i kąt obrotu (α_B) na swobodnym końcu belki jak na rysunku.

Dane: EJ, P, l Szukane: f_B, α_B



$$EJy'' = -M_{g(z)}$$

$$0 \le z \le l \qquad M_{g(z)} = -Pz$$

$$EJy'' = -M_{g(z)} = Pz$$

$$EJy' = \frac{Pz^2}{2} + C$$

$$EJy = \frac{Pz^3}{6} + Cz + D$$

Warunki brzegowe:

1) $\alpha_A = 0 \Rightarrow y'_{(z=l)} = 0$

$$\frac{Pl^2}{2} + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{Pl^2}{2}}$$

2) $y_A = 0 \Rightarrow y_{(z=l)} = 0$

$$\frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^2}{2}l + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = \frac{Pl^3}{3}}$$

Równania kątów obrotu i linii ugięcia mają postać:

$$\alpha = y' = \frac{1}{EJ}\left(\frac{P}{2}z^2 - \frac{Pl^2}{2}\right) \qquad y = \frac{1}{EJ}\left(\frac{P}{6}z^3 - \frac{Pl^2}{2}z + \frac{Pl^3}{3}\right)$$

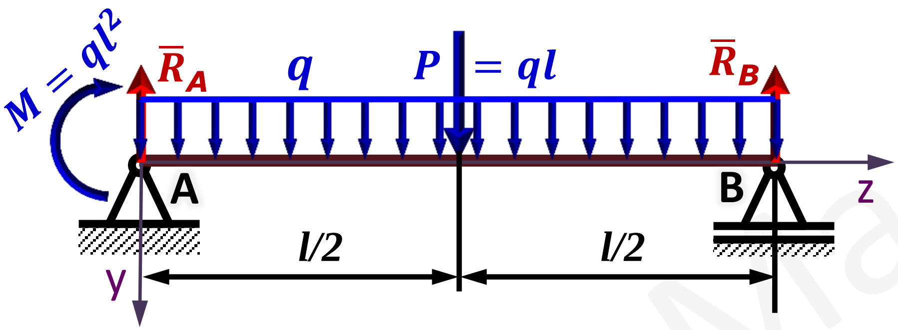
Stąd:

$$\boxed{\alpha_B = y'_{(z=0)} = -\frac{Pl^2}{2EJ}} \qquad \boxed{f_B = y_{(z=0)} = \frac{Pl^3}{3EJ}}$$

Przykład 9.2

Korzystając z gotowych wzorów na wartości ugięć i kątów obrotu belek obciążonych poszczególnymi rodzajami obciążeń, obliczyć zgodnie z zasadą superpozycji ugięcie środka ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B) belki jak na rysunku.

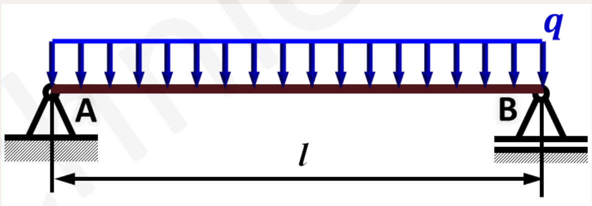
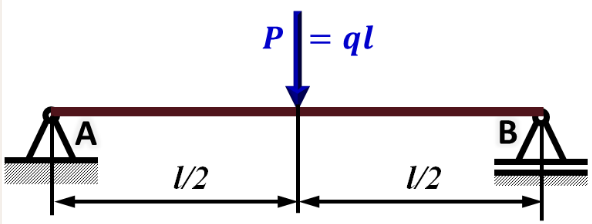
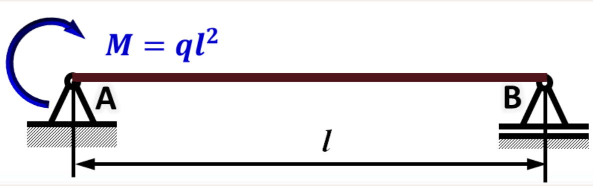
Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



$$f_{(l/2)} = f^q_{z=l/2} + f^P_{z=l/2} + f^M_{z=l/2}$$

$$f_{(l/2)} = \frac{5ql^4}{384EJ} + \frac{ql \cdot l^3}{48EJ} + \frac{3 \cdot ql^2 \cdot l^2}{48EJ}$$

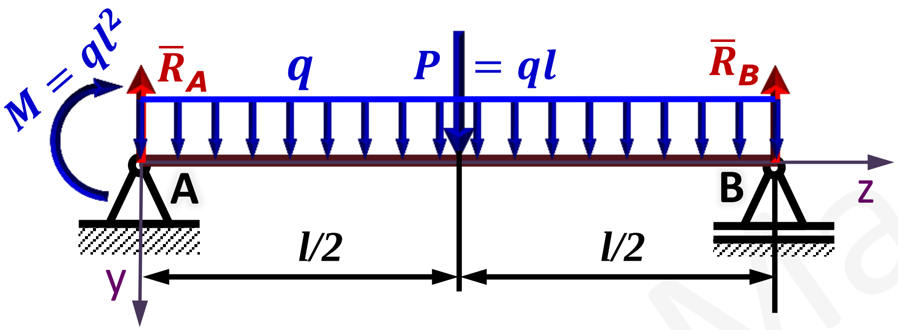
$$\boxed{f_{(l/2)} = \frac{37ql^4}{384EJ}}$$

Schemat obciążenia:	Wzory:
	$\alpha^q_{A,B} = \frac{ql^3}{24EJ}$ $f^q_{(l/2)} = \frac{5ql^4}{384EJ}$
	$\alpha^P_{A,B} = \frac{Pl^2}{16EJ}$ $f^P_{(l/2)} = \frac{Pl^3}{48EJ}$
	$\alpha^M_A = \frac{Ml}{3EJ}$ $\alpha^M_B = \frac{Ml}{6EJ}$ $f^M_{(l/2)} = \frac{3Ml^2}{48EJ}$

Przykład 9.2

Korzystając z gotowych wzorów na wartości ugięć i kątów obrotu belek obciążonych poszczególnymi rodzajami obciążeń, obliczyć zgodnie z zasadą superpozycji ugięcie środka ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B) belki jak na rysunku.

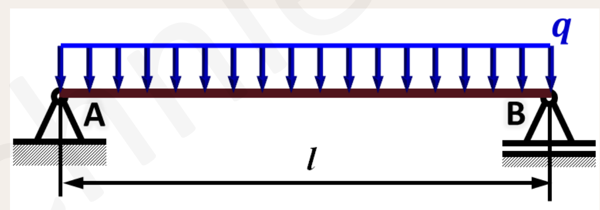
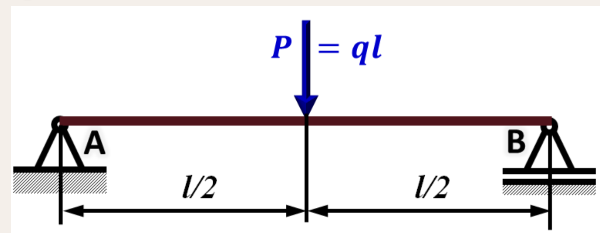
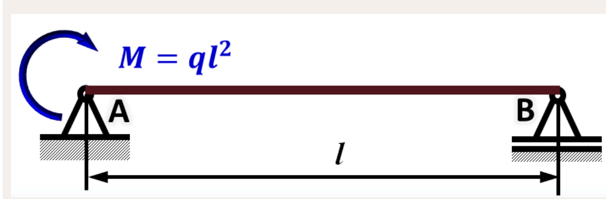
Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



$$\alpha_A = \alpha_A^q + \alpha_A^P + \alpha_A^M$$

$$\alpha_A = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql \cdot l^2}{16EJ} + \frac{ql^2 \cdot l}{3EJ}$$

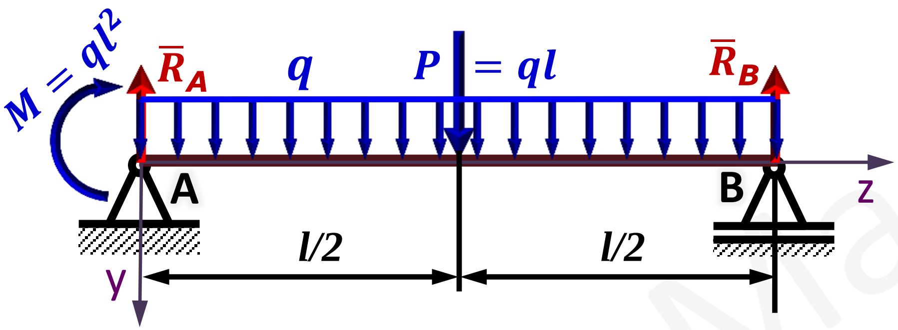
$$\boxed{\alpha_A = \frac{21ql^3}{48EJ}}$$

Schemat obciążenia:	Wzory:
	$\alpha_{A,B}^q = \frac{ql^3}{24EJ}$ $f_{(l/2)}^q = \frac{5ql^4}{384EJ}$
	$\alpha_{A,B}^P = \frac{Pl^2}{16EJ}$ $f_{(l/2)}^P = \frac{Pl^3}{48EJ}$
	$\alpha_A^M = \frac{Ml}{3EJ}$ $\alpha_B^M = \frac{Ml}{6EJ}$ $f_{(l/2)}^M = \frac{3Ml^2}{48EJ}$

Przykład 9.2

Korzystając z gotowych wzorów na wartości ugięć i kątów obrotu belek obciążonych poszczególnymi rodzajami obciążeń, obliczyć zgodnie z zasadą superpozycji ugięcie środka ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B) belki jak na rysunku.

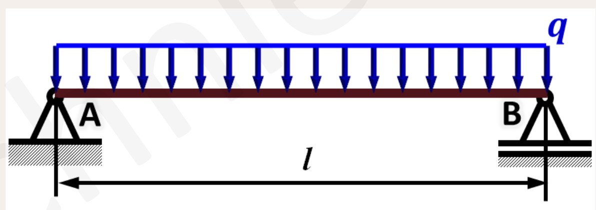
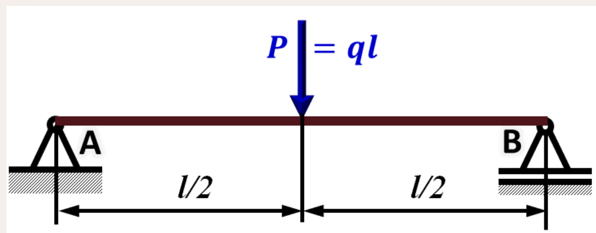
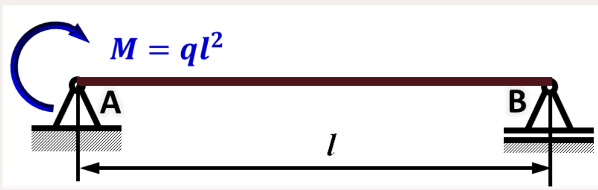
Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



$$\alpha_B = \alpha_B^q + \alpha_B^P + \alpha_B^M$$

$$\alpha_B = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql \cdot l^2}{16EJ} + \frac{ql^2 \cdot l}{6EJ}$$

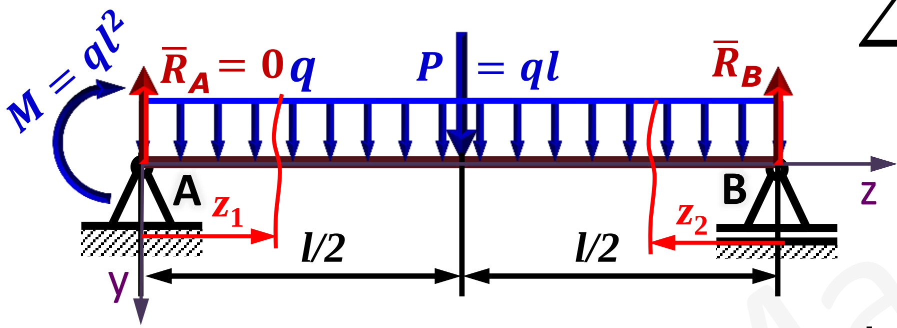
$$\boxed{\alpha_B = \frac{13ql^3}{48EJ}}$$

Schemat obciążenia:	Wzory:
	$\alpha_{A,B}^q = \frac{ql^3}{24EJ}$ $f_{(l/2)}^q = \frac{5ql^4}{384EJ}$
	$\alpha_{A,B}^P = \frac{Pl^2}{16EJ}$ $f_{(l/2)}^P = \frac{Pl^3}{48EJ}$
	$\alpha_A^M = \frac{Ml}{3EJ}$ $\alpha_B^M = \frac{Ml}{6EJ}$ $f_{(l/2)}^M = \frac{3Ml^2}{48EJ}$

Przykład 9.3

Napisać równanie różniczkowe linii ugięcia belki jak na rysunku, obliczyć ugięcie jej środka ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B).

Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}$, α_A, α_B



$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow -ql^2 + \frac{ql^2}{2} + \frac{ql^2}{2} - R_A l = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - ql - ql + R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 2ql$$

$0 \le z_1 \le l/2$

$$M_{g(z1)} = -q\frac{z_1^2}{2} + \underbrace{\boxed{ql^2}}_{}^{M}$$

$$EJy'' = -M_{g(z)} = q\frac{z_1^2}{2} - ql^2$$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_1^3 - ql^2 z_1 + C_1$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_1^4 - \frac{ql^2}{2}z_1^2 + C_1 z_1 + D_1$$

$0 \le z_2 \le l/2$

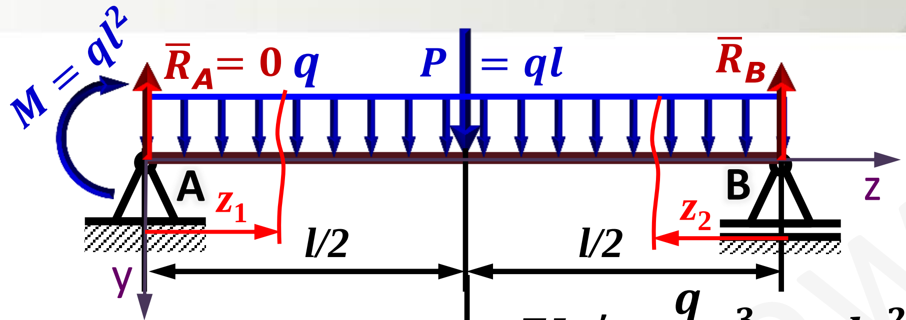
$$M_{g(z2)} = -q\frac{z_2^2}{2} + \overset{R_B}{\boxed{2ql}} \cdot z_2$$

$$EJy'' = -M_{g(z)} = q\frac{z_2^2}{2} - 2qlz_2$$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_2^3 - qlz_2^2 + C_2$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_2^4 - \frac{ql}{3}z_2^3 + C_2 z_2 + D_2$$

Przykład 9.3



<u>Dane:</u> EJ, q, l

<u>Szukane:</u> $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

$0 \le z_1 \le l/2$

$0 \le z_2 \le l/2$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_1^3 - ql^2 z_1 + C_1$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_1^4 - \frac{ql^2}{2}z_1^2 + C_1 z_1 + D_1$$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_2^3 - qlz_2^2 + C_2$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_2^4 - \frac{ql}{3}z_2^3 + C_2 z_2 + D_2$$

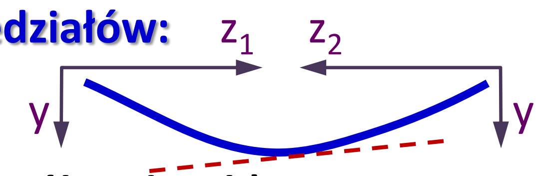
warunki brzegowe:

1° $y(z_1 = 0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$

2° $y(z_2 = 0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$

warunek ciągłości odkształceń na granicy sąsiednich przedziałów:

3° $y'(z_1 = l/2) = -y'(z_2 = l/2)$

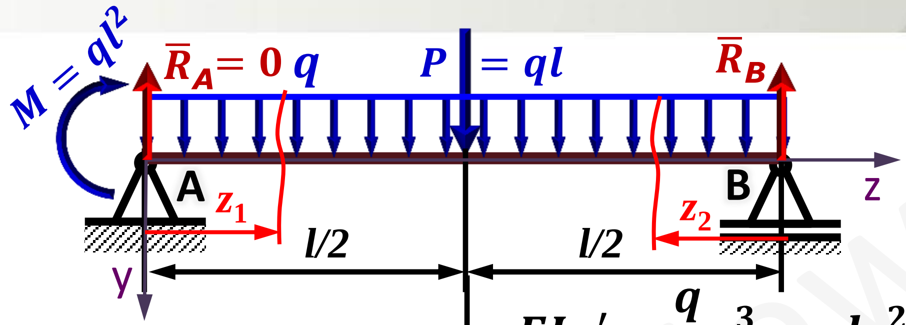


(ten sam kąt ma przeciwną wartość w obu układach współrzędnych)

$$\frac{q}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - ql^2\left(\frac{l}{2}\right) + C_1 = -\frac{q}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + ql\left(\frac{l}{2}\right)^2 - C_2$$

$$\frac{q}{48}l^3 - \frac{q}{2}l^3 + C_1 = -\frac{q}{48}l^3 + \frac{q}{4}l^3 - C_2 \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{34}{48}ql^3$$

Przykład 9.3



Dane: EJ, q, l

Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

$0 \le z_1 \le l/2$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_1^3 - ql^2 z_1 + C_1$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_1^4 - \frac{ql^2}{2}z_1^2 + C_1 z_1 + D_1$$

$0 \le z_2 \le l/2$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_2^3 - qlz_2^2 + C_2$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_2^4 - \frac{ql}{3}z_2^3 + C_2 z_2 + D_2$$

warunki brzegowe:

1° $y(z_1 = 0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$

2° $y(z_2 = 0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$

warunek ciągłości odkształceń na granicy sąsiednich przedziałów:

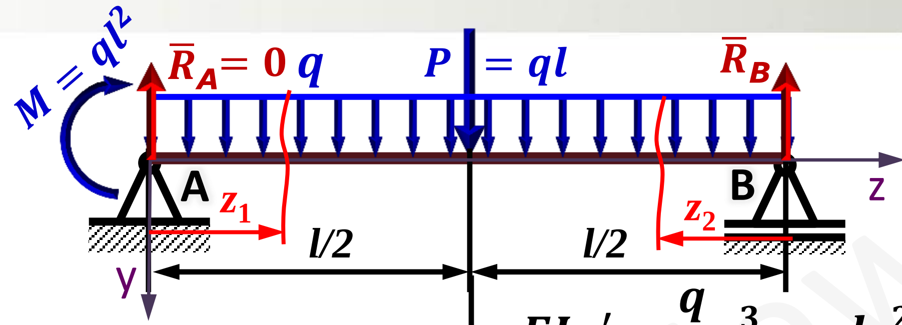
3° $y'(z_1 = l/2) = -y'(z_2 = l/2) \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{34}{48}ql^3$

4° $y(z_1 = l/2) = y(z_2 = l/2)$

$$\frac{q}{24}\left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{ql^2}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + C_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{24}\left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{ql}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + C_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$\frac{q}{192}l^3 - \frac{q}{4}l^3 + C_1 = \frac{q}{192}l^3 - \frac{q}{12}l^3 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 + \frac{1}{6}ql^3$$

Przykład 9.3



Dane: EJ, q, l

Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

$0 \le z_1 \le l/2$ | $0 \le z_2 \le l/2$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_1^3 - ql^2 z_1 + C_1$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_1^4 - \frac{ql^2}{2}z_1^2 + C_1 z_1 + D_1$$

$$EJy' = \frac{q}{6}z_2^3 - qlz_2^2 + C_2$$

$$EJy = \frac{q}{24}z_2^4 - \frac{ql}{3}z_2^3 + C_2 z_2 + D_2$$

warunki brzegowe: $D_1 = 0$ $D_2 = 0$

warunek ciągłości odkształceń na granicy sąsiednich przedziałów:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{34}{48}ql^3 \\ C_1 = C_2 + \dfrac{1}{6}ql^3 \end{cases}$$

$$C_2 + \frac{1}{6}ql^3 + C_2 = \frac{34}{48}ql^3 \Rightarrow C_2 = \frac{13}{48}ql^3 \Rightarrow C_1 = \frac{21}{48}ql^3$$

Ostateczna postać równań kątów obrotu i ugięć:

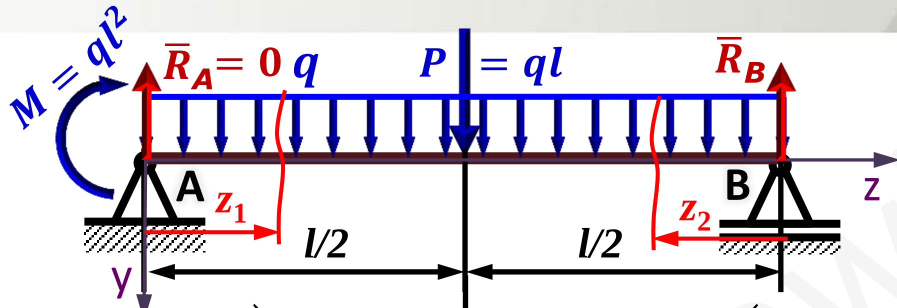
$$y'(z_1) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{6}z_1^3 - ql^2 z_1 + \frac{21}{48}ql^3\right)$$

$$y(z_1) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}z_1^4 - \frac{ql^2}{2}z_1^2 + \frac{21}{48}ql^3 z_1\right)$$

$$y'(z_2) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{6}z_2^3 - qlz_2^2 + \frac{13}{48}ql^3\right)$$

$$y(z_2) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}z_2^4 - \frac{ql}{3}z_2^3 + \frac{13}{48}ql^3 z_2\right)$$

Przykład 9.3



Dane: EJ, q, l

Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

$0 \le z_1 \le l/2$

$0 \le z_2 \le l/2$

$$y'(z_1) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{6}z_1^3 - ql^2 z_1 + \frac{21}{48}ql^3\right)$$

$$y(z_1) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}z_1^4 - \frac{ql^2}{2}z_1^2 + \frac{21}{48}ql^3 z_1\right)$$

$$y'(z_2) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{6}z_2^3 - qlz_2^2 + \frac{13}{48}ql^3\right)$$

$$y(z_2) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}z_2^4 - \frac{ql}{3}z_2^3 + \frac{13}{48}ql^3 z_2\right)$$

$$\alpha_A = y'(z_1 = 0) = \frac{21ql^3}{48EJ}$$

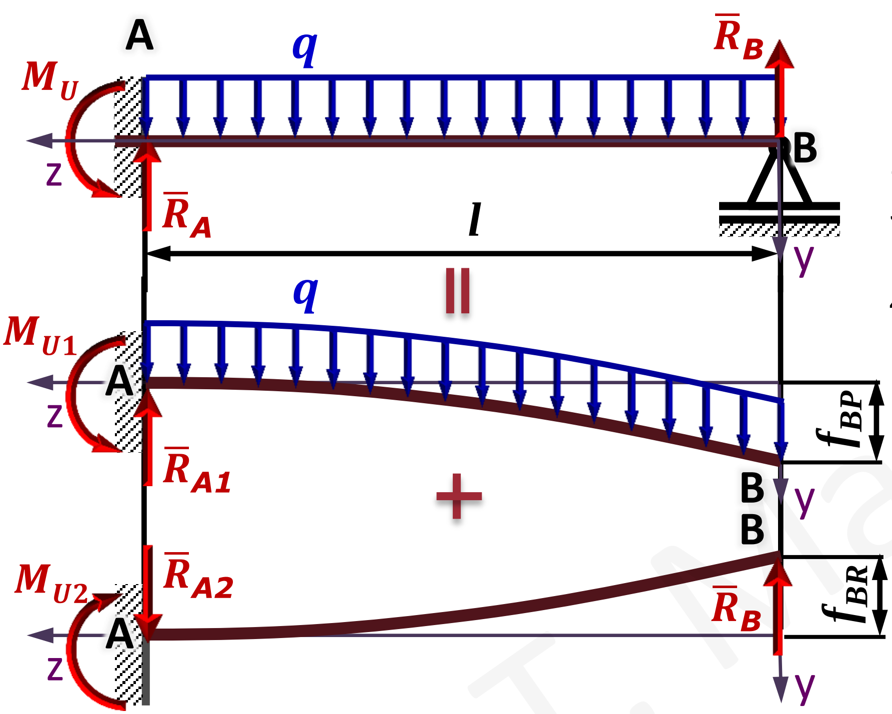
$$\alpha_B = y'(z_2 = 0) = \frac{13ql^3}{48EJ}$$

$$f_{(l/2)} = y(z_1 = l/2) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}\left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{ql^2}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{21}{48}ql^3\frac{l}{2}\right) = \frac{37ql^4}{384EJ}$$

co odpowiada wynikom otrzymanym w przykładzie 9.2:

$$\boxed{\alpha_A = \frac{21ql^3}{48EJ}} \qquad \boxed{f_{(l/2)} = \frac{37ql^4}{384EJ}} \qquad \boxed{\alpha_B = \frac{13ql^3}{48EJ}}$$

Przykład 9.4 Wyznaczyć reakcje i siły wewnętrzne dla belki jak na rysunku:



Dane: EJ, q, l Szukane: $R_A, R_B, M_A, M_{g(z)}, T_{(z)}$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow M_U - \frac{ql^2}{2} + R_B l = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - ql + R_B = 0 \qquad (2)$$

$$f_{BP} + f_{BR} = 0 \qquad (3)$$

1) Ugięcie belki pozbawionej podpory B:

$$0 \le z \le l \qquad EJy'' = -M_{g(z)} = q\frac{z^2}{2}$$

$$EJy' = \frac{qz^3}{6} + C_1 \qquad EJy = \frac{qz^4}{24} + C_1 z + D_1$$

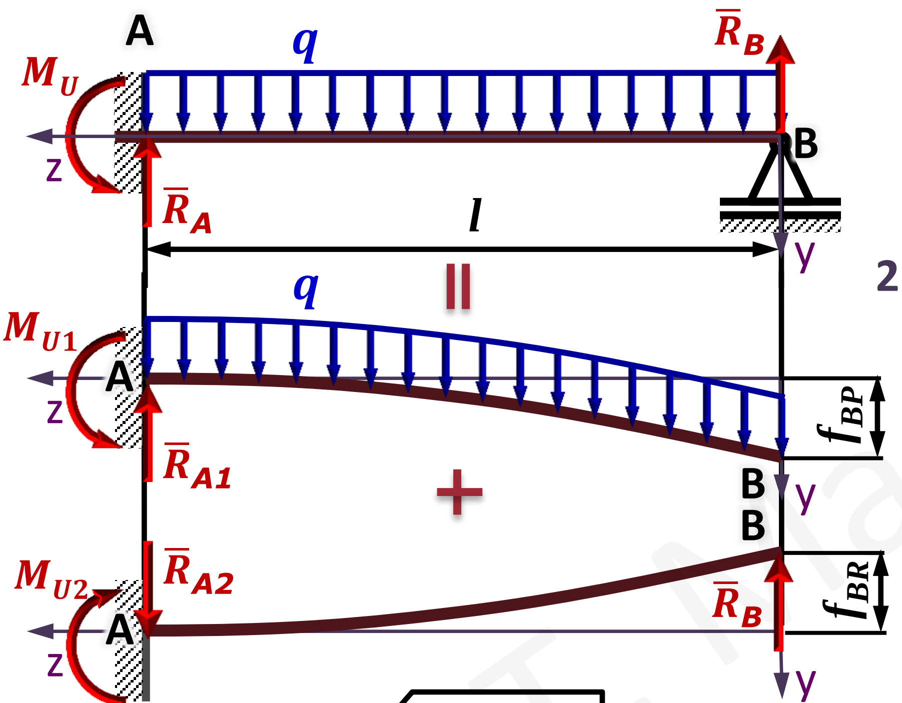
Warunki brzegowe: $\alpha_A = 0 \Rightarrow y'_{(z=l)} = 0 \Rightarrow \frac{ql^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{ql^3}{6}}$

$$y_A = 0 \Rightarrow y_{(z=l)} = 0 \Rightarrow \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^3}{6} l + D_1 = 0 \Rightarrow \boxed{D_1 = \frac{ql^4}{8}}$$

$$f_{BP} = y_{(z=0)} = \frac{D_1}{EJ} \qquad \boxed{f_{BP} = \frac{ql^4}{8EJ}}$$

9.5. Belki statycznie niewyznaczalne - wyznaczanie reakcji

Przykład 9.4 Wyznaczyć reakcje i siły wewnętrzne dla belki jak na rysunku:



Dane: EJ, q, l Szukane: $R_A, R_B, M_A, M_{g(z)}, T_{(z)}$

$$\boxed{f_{BP} = \frac{ql^4}{8EJ}}$$

$$f_{BP} + f_{BR} = 0 \qquad (3)$$

2) Ugięcie belki pod wpływem siły R_B:

$$0 \le z \le l \qquad EJy'' = -M_{g(z)} = -R_B z$$

$$EJy' = -\frac{R_B}{2}z^2 + C_2 \qquad EJy = -\frac{R_B}{6}z^3 + C_2 z + D_2$$

Warunki brzegowe:

$$y'_{(z=l)} = 0 \Rightarrow -\frac{R_B}{2}l^2 + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{R_B}{2}l^2}$$

$$y_{(z=l)} = 0 \Rightarrow -\frac{R_B}{6}l^3 + \frac{R_B}{2}l^3 + D_2 = 0 \Rightarrow \boxed{D_2 = -\frac{R_B l^3}{3}}$$

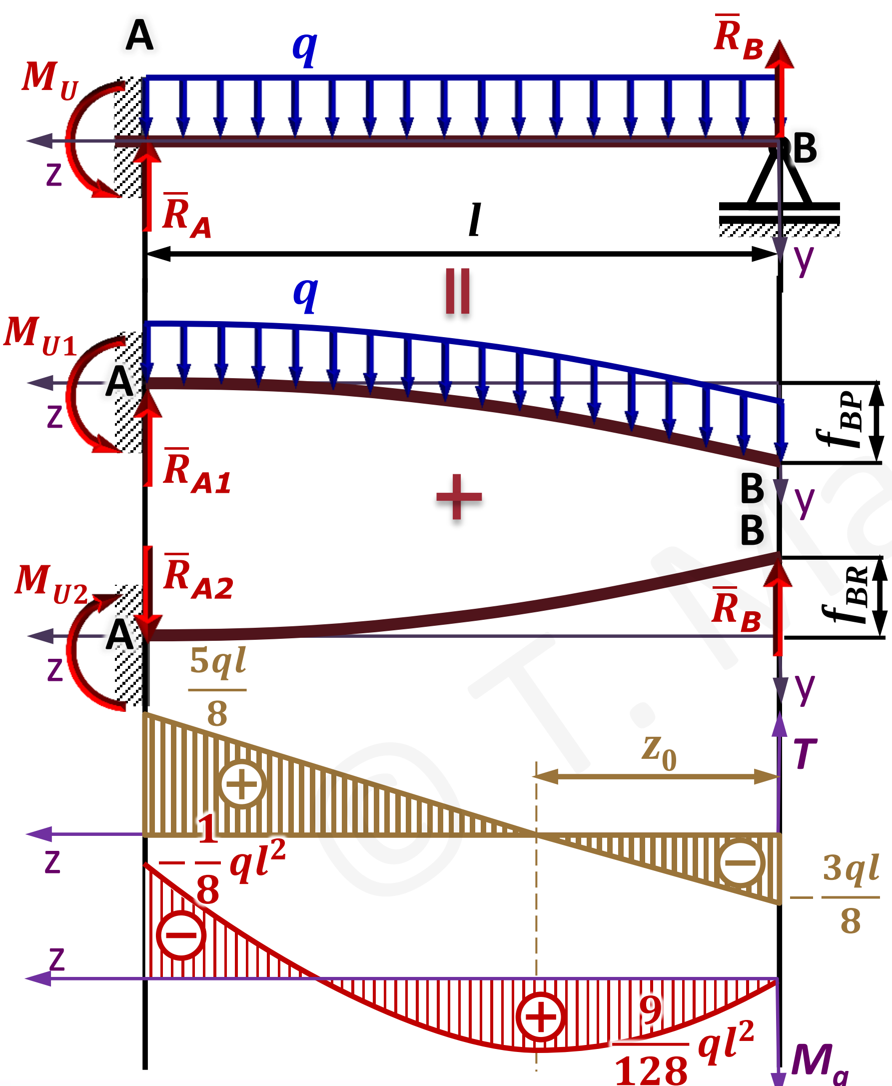
$$f_{BP} = y_{(z=0)} = \frac{D_2}{EJ} \Rightarrow \boxed{f_{BR} = -\frac{R_B l^3}{3EJ}}$$

3) Obliczanie siły R_B:

$$\boxed{f_{BP}} \quad \boxed{f_{BR}}$$

$$f_{BP} + f_{BR} = 0 \Rightarrow \frac{ql^4}{8EJ} - \frac{R_B l^3}{3EJ} = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8}ql}$$

Przykład 9.4



Dane: EJ, q, l Szukane: $R_A, R_B, M_A, M_{g(z)}, T_{(z)}$

$$\boxed{R_B = \frac{3}{8}ql}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow M_U - \frac{ql^2}{2} + R_B l = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - ql + R_B = 0 \qquad (2)$$

4) Obliczanie pozostałych reakcji:

$$(1) \Rightarrow M_U = \frac{ql^2}{2} - R_B l \Rightarrow \boxed{M_U = \frac{1}{8}ql^2}$$

$$(2) \Rightarrow R_A = ql - R_B \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8}ql}$$

5) Równania sił wewnętrznych:

$$0 \le z \le l \qquad T(z) = -RB + qz$$

$$T(z_0) = -\frac{3}{8}ql + qz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{3}{8}l$$

$$M_g(z) = \frac{3}{8}qlz - q\frac{z^2}{2} \qquad M_g(0) = 0$$

$$M_g(z = l) = -\frac{1}{8}ql^2 \qquad M_g(z_0) = \frac{9}{128}ql^2$$